Limiti di funzioni reali di variabile reale

Unità 2 Tema N

1. Introduzione al concetto di limite

Esempi introduttivi al concetto di limite

In questo paragrafo vogliamo introdurre la prima fondamentale operazione del calcolo infinitesimale, quella di *limite*. Per avvicinarci a questo concetto, analizziamo insieme alcuni esempi, in cui cominciamo a familiarizzare con la nozione di limite a livello intuitivo.

STRUMENTI DIGITALI
- RISORSE IN GEOGEBRA
- VIDEOLEZIONI
- ESERCIZI INTERATTIVI
- GLOSSARIO MULTIMEDIALE

ESEMPIO Limite finito quando x tende a un valore finito

Consideriamo la funzione:

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

e studiamo il suo comportamento quando x assume valori sempre più prossimi a 3.

- **Analisi numerica**

Osserviamo che la funzione non è definita per $x = 3$, tuttavia possiamo calcolarne le immagini per valori di x «vicini» a 3. Attribuendo per esempio a x i valori indicati in tabella, con l'aiuto di una calcolatrice otteniamo i valori approssimati di y riportati.

x	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1
y	5,9	5,99	5,999	Non definita	6,001	6,01	6,1

$\longrightarrow 6 \longleftarrow$

Vediamo che quando la variabile x assume valori sempre più prossimi a 3 i corrispondenti valori di y si avvicinano sempre più a 6. Per esprimere questo comportamento della funzione in prossimità del valore $x = 3$ scriviamo:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

che si legge: «il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a 3 è 6».

- **Interpretazione grafica**

Si può avere conferma di questo comportamento della funzione in un intorno di 3 anche tracciando il suo grafico; poiché

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3 \quad \text{per } x \neq 3$$

il grafico della funzione è una retta, privata del suo punto di ascissa 3.

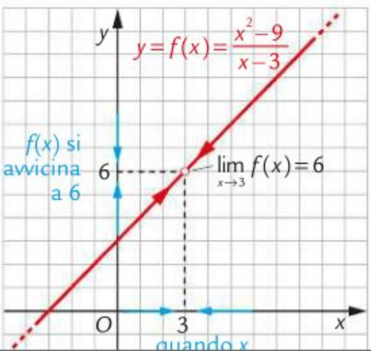


Figure dinamiche
Esplorazione dinamica del limite dell'esempio qui a fianco

ESEMPIO **Limite finito quando x tende a infinito**

Consideriamo la funzione:

$$y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

e studiamo il suo comportamento quando x assume valori positivi via via sempre più grandi.

- **Analisi numerica**

Attribuendo per esempio a x i valori indicati in tabella, con l'aiuto di una calcolatrice otteniamo i valori approssimati di y riportati.

x	100	200	300	400	500	1000	10 000
y	0,9802	0,99	0,9934	0,995	0,996	0,998	0,9998

$\longrightarrow 1$

Vediamo così che quando la variabile x assume valori positivi sempre più grandi (si dice «tendenti a $+\infty$») i corrispondenti valori di y si avvicinano sempre più a 1. Per esprimere questo comportamento della funzione scriviamo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

che si legge: «il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a più infinito è 1».

- **Interpretazione grafica**

Il grafico della funzione $y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ presenta la retta di equazione $y = 1$ come asintoto orizzontale.

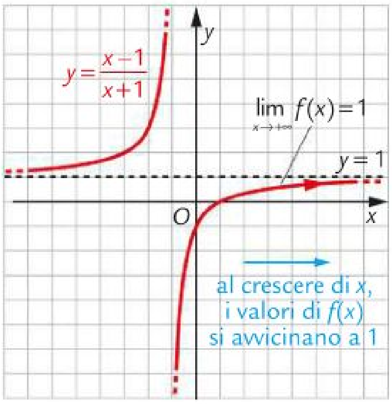


Figure dinamiche
Esplorazione dinamica del limite dell'esempio qui a fianco

ESEMPIO **Limite infinito quando x tende a un valore finito**

Consideriamo la funzione:

$$y = f(x) = \frac{1}{|x|}$$

e studiamo il suo comportamento quando x assume valori sempre più prossimi a 0.

- **Analisi numerica**

La funzione non è definita per $x = 0$, tuttavia possiamo calcolarne le immagini per valori di x «vicini» a 0. Attribuendo per esempio a x i valori indicati in tabella otteniamo i valori di y riportati.

x	−0,1	−0,01	−0,001	−0,0001	0	0,0001	0,001	0,01	0,1
y	10	100	1000	10 000	Non definita	10 000	1000	100	10

$\longrightarrow$ i valori di y $\longleftarrow$
diventano sempre più grandi

Vediamo così che quando x assume valori sempre più vicini a 0 i corrispondenti valori di y diventano sempre maggiori, ovvero «tendono a $+\infty$». Scriveremo:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

- **Interpretazione grafica**

Il grafico della funzione $y = f(x) = \frac{1}{|x|}$ presenta l'asse y come asintoto verticale.

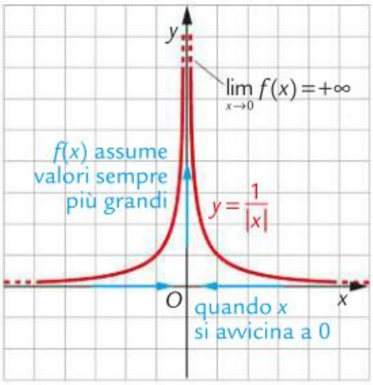


Figure dinamiche

Esplorazione dinamica del limite dell'esempio qui a fianco

ESEMPIO **Limite infinito quando x tende a infinito**

Consideriamo la funzione:

$$y = f(x) = 2^x$$

e studiamo il suo comportamento quando x assume valori positivi via via sempre più grandi.

- **Analisi numerica**

Attribuendo per esempio a x i valori indicati in tabella, con l'aiuto di una calcolatrice otteniamo i valori di y riportati.

x	10	15	20	25
y	1024	32 768	1 048 576	33 554 432

i valori di y diventano (rapidamente) sempre più grandi

Vediamo così che quando la variabile x assume valori positivi via via più grandi (tendenti a $+\infty$) anche i corrispondenti valori di y diventano sempre maggiori (ovvero tendono anch'essi a $+\infty$). Scriveremo allora:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

che si legge: «il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a più infinito è più infinito».

- **Interpretazione grafica**

La funzione esaminata è una funzione esponenziale che, come è noto, al crescere di x assume valori che tendono «rapidamente» a $+\infty$.

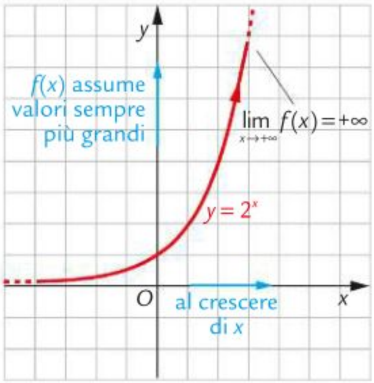
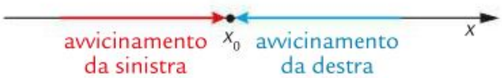


Figure dinamiche

Esplorazione dinamica del limite dell'esempio qui a fianco

Esempi introduttivi al concetto di limite destro e limite sinistro

Per poter dire che il limite di una funzione per $x \to x_0$, con $x_0 \in \mathbf{R}$, è l, è necessario controllare che $f(x)$ tenda a l sia quando x si avvicina a x_0 per valori *minori* di x_0 (ossia «da sinistra» rispetto a x_0) sia quando x si avvicina a x_0 per valori *maggiori* di x_0 (ossia «da destra» rispetto a x_0):



In alcuni casi può accadere che il comportamento della funzione in un intorno *destro* di x_0 sia diverso dal comportamento in un intorno *sinistro* di x_0, oppure che una funzione sia definita solo per valori maggiori o minori di x_0 e che quindi abbia senso cer-

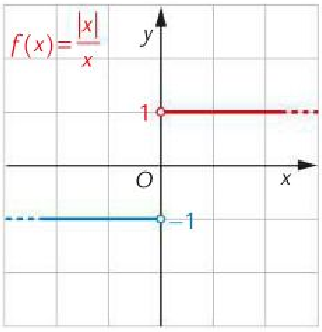
Per indagare queste situazioni si parla di **limite destro** e di **limite sinistro** e si scrive:

- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ per indicare il limite *sinistro*;
- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ per indicare il limite *destro*.

ESEMPIO Limite destro e limite sinistro

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{|x|}{x}$ e studiamo il suo comportamento quando x assume valori vicini a 0.

La funzione **non** è definita per $x = 0$. Il grafico della funzione mostra chiaramente il suo comportamento.



Per $x > 0$ abbiamo:

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

quindi $f(x) \to 1$ per $x \to 0^+$.

Invece per $x < 0$ abbiamo:

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

quindi $f(x) \to -1$ per $x \to 0^-$. Esistono perciò i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Non esiste invece il limite della funzione per $x \to 0$, poiché i due limiti destro e sinistro sono diversi tra loro.

Come si può intuire da quest'ultimo esempio, il limite di una funzione per $x \to x_0$ esiste se e solo se i due limiti, destro e sinistro, esistono e sono uguali.

La definizione generale di limite

Dalla discussione degli esempi precedenti emerge in modo sufficientemente chiaro il concetto di limite, di cui possiamo cominciare a dare una prima «**definizione**» **intuitiva**:

Data una funzione $f(x)$, supponiamo che x_0 ed l rappresentino due numeri reali oppure $+\infty$ o $-\infty$, cioè che $x_0 \in \mathbf{R}^*$, $l \in \mathbf{R}^*$.
Diremo che il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a x_0 è l, e scriveremo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se la funzione $f(x)$ assume valori vicini quanto si vuole a l, ogniqualvolta i valori di x sono sufficientemente vicini a x_0 (con eventuale esclusione del punto $x = x_0$ dove la funzione può non essere definita).

Rifletti

Una rigorosa definizione del concetto di limite è essenziale almeno per due ragioni:
a. disporre di un criterio che permetta di decidere *senza ambiguità* se una funzione tenda o meno a un certo limite, per qualsiasi tipo di funzione;
b. fondare su di una base sicura le dimostrazioni dei teoremi sui limiti che vedremo nella prosecuzione di questa Unità.

Questa «definizione» intuitiva ha il pregio di fare emergere in modo abbastanza chiaro il significato del concetto di limite, ma utilizza un **linguaggio fortemente impreciso**, che non può essere accettato dal punto di vista matematico; frasi come «assume valori vicini a...» risultano infatti troppo ambigue: di quanto vicini? E che cosa intendiamo con il concetto di «vicinanza», per esempio, se x_0 o l sono $+\infty$ o $-\infty$?
Per superare questi problemi e arrivare a una formulazione rigorosa del concetto di limite occorre esprimere il concetto di «vicinanza» tramite quello di **intorno**. Possiamo

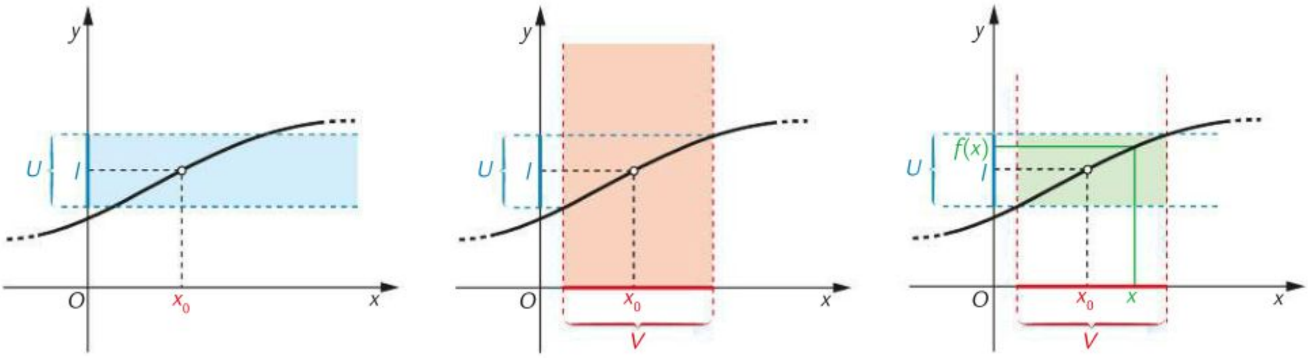
DEFINIZIONE GENERALE DI LIMITE

Siano $x_0 \in \mathbf{R}^*$, $l \in \mathbf{R}^*$, e sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di x_0, eccetto al più x_0.
Diremo che il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a x_0 è l e scriveremo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

quando si verifica che:

a. per ogni intorno U di l (fig. 2.1a)
b. esiste un intorno V di x_0 (fig. 2.1b)
c. tale che per ogni $x \in V$, con $x \neq x_0$, risulta $f(x) \in U$ (fig. 2.1c).



a. Per ogni intorno U di l sull'asse y... **b.** esiste un intorno V di x_0 sull'asse x... **c.** ...tale che per ogni $x \in V$ con $x \neq x_0$ risulta: $f(x) \in U$.

Figura 2.1

In simboli possiamo scrivere:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \underbrace{U}_{\text{intorno di } l} \; \exists \underbrace{V}_{\text{intorno di } x_0} : x \in V - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U$$

È importante fare alcune osservazioni.

- La fig. 2.1 visualizza la definizione nel caso in cui x_0 ed l siano *finiti*, ma la definizione che abbiamo dato è «generale», nel senso che va bene anche nel caso in cui x_0 o l siano infiniti; per questo motivo nella definizione abbiamo precisato che x_0 ed l non sono elementi di $\mathbf{R}$ ma di $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$.
- L'intorno V di x_0 *dipende* dall'intorno U di l che è stato scelto sull'asse y.
- Quando calcoliamo il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ andiamo ad analizzare il comportamento della funzione *in prossimità* di x_0, **non** *in* x_0. Non ci interessa perciò che cosa accade nel punto $x = x_0$ dove la funzione, come abbiamo già detto, potrebbe anche non essere definita. Nella definizione di limite è quindi essenziale la precisazione «$f(x) \in U$ per ogni $x \in V$, **con** $x \neq x_0$».

Esercizi p. 82

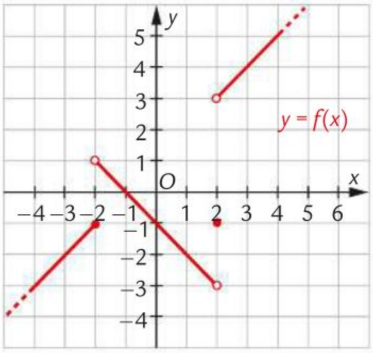
2. Dalla definizione generale alle definizioni particolari

La definizione «generale» di limite data nel paragrafo precedente, come abbiamo già detto, si adatta sia al caso in cui x_0 ed l sono *finiti* sia al caso in cui sono *infiniti*. L'analisi dei quattro casi che si possono presentare:

1. x_0 ed l finiti
2. x_0 finito ed l infinito
3. x_0 infinito ed l finito
4. x_0 ed l infiniti

è tuttavia utile perché porta a definizioni più «operative» e a visualizzazioni più im-

15 Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono.



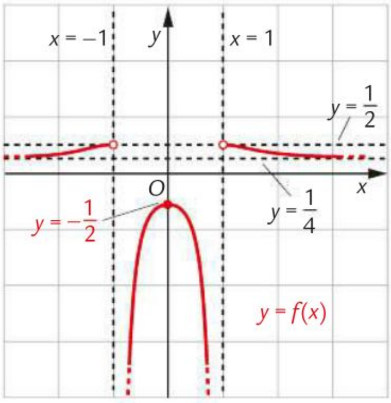
a. $\lim_{x\to-2^-} f(x) = $ .... $\quad \lim_{x\to2^+} f(x) = $ ....

b. $\lim_{x\to-2^+} f(x) = $ .... $\quad \lim_{x\to2} f(x) = $ ....

c. $\lim_{x\to-2} f(x) = $ .... $\quad \lim_{x\to0} f(x) = $ ....

d. $\lim_{x\to2^-} f(x) = $ .... $\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = $ ....

16 Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono.



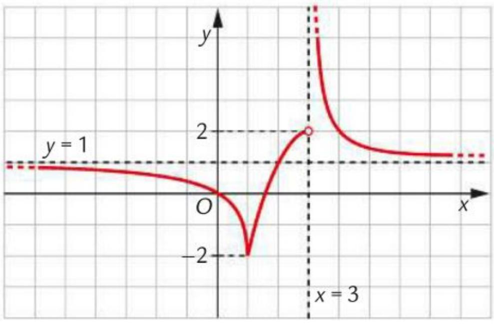
a. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = $ .... $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = $ ....

b. $\lim_{x\to-1^-} f(x) = $ .... $\quad \lim_{x\to-1^+} f(x) = $ ....

c. $\lim_{x\to0} f(x) = $ .... $\quad \lim_{x\to1} f(x) = $ ....

d. $\lim_{x\to1^-} f(x) = $ .... $\quad \lim_{x\to1^+} f(x) = $ ....

17 **Vero o falso?** Facendo riferimento al grafico, deduci se le seguenti affermazioni sono vere o false.



a. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ V F

b. $\lim_{x\to1} f(x) = -2^+$ V F

c. $\lim_{x\to2} f(x) = 1$ V F

d. $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0^-$ V F

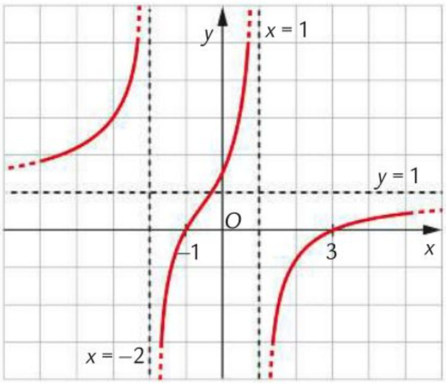
e. $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0^+$ V F

f. $\lim_{x\to3} f(x)$ non esiste V F

g. $\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty$ V F

h. $\lim_{x\to3} f(x) = \infty$ V F

18 **Vero o falso?** Facendo riferimento al grafico, deduci se le seguenti affermazioni sono vere o false.



a. $\lim_{x\to-2} f(x) = \infty$ V F

b. $\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$ V F

c. $\lim_{x\to1} f(x)$ non esiste V F

d. $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ V F

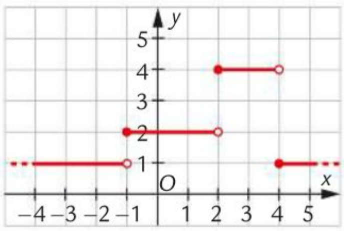
e. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ V F

f. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1^+$ V F

g. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1^-$ V F

h. $\lim_{x\to0} f(x)$ non esiste V F

19 **Vero o falso?** Facendo riferimento al grafico, deduci se le seguenti affermazioni sono vere o false.



a. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ V F

b. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ V F

c. $\lim_{x\to-1^-} f(x) = 1$ V F

d. $\lim_{x\to-1^+} f(x) = 2$ V F

e. $\lim_{x\to0} f(x) = 2$ V F

f. $\lim_{x\to2^-} f(x) = 2$ V F

g. $\lim_{x\to2^+} f(x) = 2$ V F

h. $\lim_{x\to4} f(x)$ non esiste V F

i. $\lim_{x\to2} f(x)$ esiste V F

20 ESERCIZIO SVOLTO

Tracciamo il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{|x-2|}$ e deduciamo da esso i valori dei seguenti limiti:

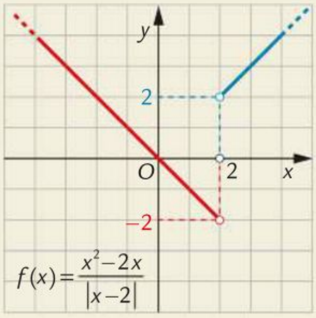
$\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

- Osserviamo anzitutto che la funzione data è definita per $x \neq 2$, quindi il suo dominio è $\mathbf{R} - \{2\}$.
- In base alla definizione di valore assoluto:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{|x-2|} = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-2} = \dfrac{x(x-2)}{x-2} = x & \text{se } x > 2 \\ \dfrac{x^2-2x}{-(x-2)} = \dfrac{x(x-2)}{-(x-2)} = -x & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

In definitiva dobbiamo tracciare il grafico della funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 2 \\ -x & \text{se } x < 2 \end{cases}$$



- Dal grafico in figura si deduce che il $\lim_{x \to 2} f(x)$ non esiste, mentre:

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -2$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$

21 Traccia il grafico della funzione $f(x) = 2\dfrac{|x|}{x}$ e utilizzalo per dedurre quanto valgono i seguenti limiti:

$\lim_{x \to 0^-} f(x)$ $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

22 Traccia il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2x-4}{x-3}$ e utilizzalo per dedurre quanto valgono i seguenti limiti:

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

23 Traccia il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$ e utilizzalo per dedurre quanto valgono i seguenti limiti:

$\lim_{x \to 2^-} f(x)$ $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

24 Traccia il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{|x-3|}$ e utilizzalo per dedurre quanto valgono i seguenti limiti:

$\lim_{x \to 3^-} f(x)$ $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

25 Traccia il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2x-2}{|x^2-1|}$ e utilizzalo per dedurre quanto valgono i seguenti limiti:

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

26 Traccia il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x^2-2x|}$ e utilizzalo per dedurre quanto valgono i seguenti limiti:

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

27 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione che abbia le seguenti proprietà:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$ $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1$ $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -1$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

28 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione che abbia le seguenti proprietà:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

29 **Inventa tu.** Traccia il grafico di una funzione che abbia le seguenti proprietà:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$