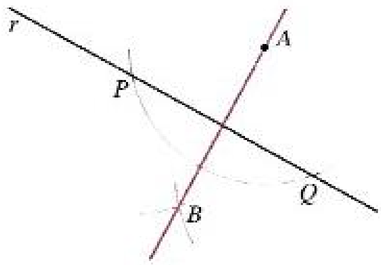
b) Individuare il punto medio di un segmento

La costruzione è quella precedente. Costruendo l'asse di un segmento (che è la perpendicolare nel suo punto medio) abbiamo anche ottenuto un modo per individuare il punto medio del segmento.

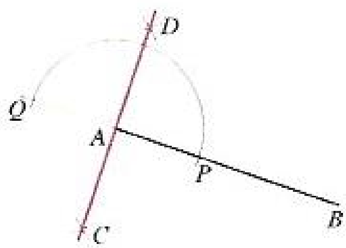
c) Tracciare la perpendicolare a una retta *r* da un punto esterno *A*

Centriamo il compasso nel punto A e tracciamo un arco di circonferenza con un'apertura tale da intersecare la retta r in due punti P e Q.
Apriamo il compasso con un'apertura qualsiasi e, con tale apertura e rispettivi centri P e Q, tracciamo due archi. Questi si incontrano in un punto B. La retta che passa per A e B è perpendicolare alla retta data.
Infatti la retta risulta essere l'asse del segmento PQ, che appartiene alla retta data.



d) Tracciare la perpendicolare a un segmento *AB* in un suo estremo

Scegliamo, per esempio, l'estremo A.
Prolunghiamo il segmento AB dalla parte di A per un tratto. Apriamo il compasso con un'apertura qualsiasi e, con centro in A, tracciamo una semicirconferenza. Questa incontra il segmento AB in un punto P e il suo prolungamento in un punto Q.
Ora apriamo il compasso con un'apertura maggiore della precedente e, con rispettivi centri prima in P e poi in Q, tracciamo due archi, che si incontrano in due punti C e D.
La retta per C e D passa per A ed è perpendicolare al segmento AB.



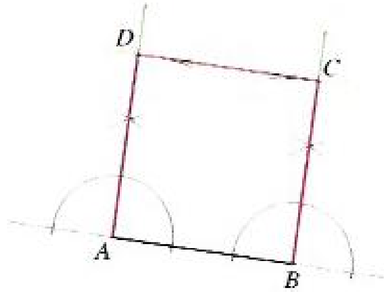
Infatti la retta disegnata è l'asse del segmento PQ; quindi, è a esso perpendicolare e poiché A è il punto medio del segmento PQ, passa per A.

ATTENZIONE!

A è il punto medio del segmento PQ per costruzione. Infatti, abbiamo puntato il compasso in A e abbiamo individuato sulla retta di AB due punti alla stessa distanza da A.

e) Costruire il quadrato di lato il segmento dato *AB*

La costruzione è una diretta applicazione della precedente.
Con la costruzione d) disegniamo la perpendicolare ad AB in ciascuno dei suoi estremi.
Centrando il compasso in ciascuno dei due estremi, riportiamo sulle rispettive perpendicolari la lunghezza di AB e individuiamo i punti C e D.
Il quadrato $ABCD$ è così costruito.



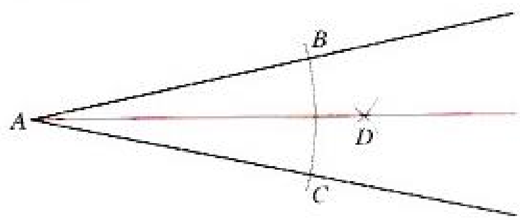
f) Tracciare la bisettrice di un angolo

La bisettrice di un angolo è quella retta che lo divide in due angoli di uguale ampiezza

ATTENZIONE!

La proprietà della bisettrice è dimostrata nel teorema 36.

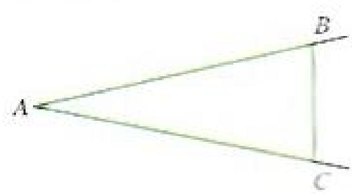
Indichiamo con A il vertice dell'angolo. Con il compasso tracciamo, con un'apertura qualsiasi, un arco che individua sui lati dell'angolo due punti B e C (che sono, quindi, alla stessa distanza da A).
L'asse del segmento BC è la bisettrice richiesta. Per tracciare tale asse basta seguire la costruzione già considerata. Ma, poiché sappiamo già che passerà per A (che è equidistante dagli estremi di AB), è sufficiente aprire il compasso di un'apertura qualsiasi (maggiore della metà di AB) e tracciare, con rispettivi centri in B e in C, due archi. Questi si incontrano in un punto D. La retta per A e D è la bisettrice dell'angolo.



ATTENZIONE!

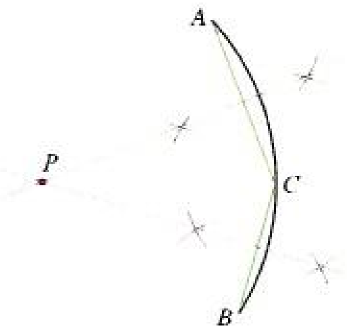
Per *base* di un triangolo isoscele qui intendiamo il suo lato disuguale.
Le proprietà dell'altezza relativa al lato disuguale di un triangolo isoscele sono dimostrate nel teorema 20.

Infatti, il triangolo ABC risulta isoscele. Rispetto alla sua base BC, la retta disegnata è certamente altezza (perché è asse di BC) e in un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base coincide con la bisettrice dell'angolo opposto.



g) Dato un arco $\overset{\frown}{AB}$ di circonferenza, trovare il centro della circonferenza cui appartiene

Scegliamo un punto qualsiasi C sull'arco e tracciamo le due corde AC e CB. Tracciamo i loro rispettivi assi. Questi si incontrano in un punto P che è il centro della circonferenza a cui appartiene l'arco $\overset{\frown}{AB}$.



Il punto P è infatti alla stessa distanza da A, B e C e per tre punti non allineati passa una sola circonferenza.

ATTENZIONE!

L'esistenza di una sola circonferenza passante per tre punti non allineati è dimostrata nel teorema 40.

APPROFONDIMENTO

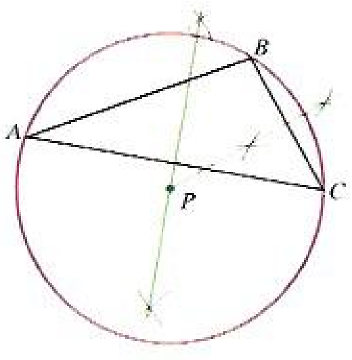
Le precedenti costruzioni evidenziano la seguente proprietà degli archi e delle corde di una circonferenza:

Il raggio che divide una corda in due parti uguali è a esso perpendicolare.

Tale raggio appartiene infatti al suo asse. Questo teorema è un corollario del teorema 38 che stabilisce che un diametro taglia nel loro punto medio tutte le corde a esso perpendicolari.

h) Tracciare la circonferenza circoscritta a un triangolo

Il centro della circonferenza circoscritta a un triangolo è il punto di intersezione degli assi dei suoi lati.
La costruzione è allora diretta conseguenza delle precedenti.
Per trovare il centro della circonferenza basta tuttavia tracciare solo i rispettivi assi di due lati e trovare il loro punto di intersezione P; il terzo asse passerà necessariamente anch'esso per tale punto.



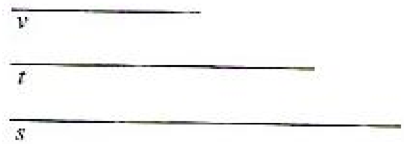
Il punto P è equidistante dai tre vertici A, B e C: è il centro della circonferenza che passa per essi.

ATTENZIONE!

La costruzione è giustificata dal teorema 40.

i) Disegnare un triangolo dati i suoi tre lati

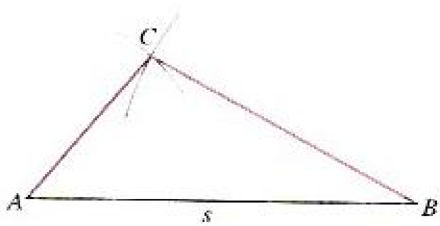
Sono dati tre segmenti s, t e v. Vogliamo costruire un triangolo i cui lati siano lunghi rispettivamente come questi tre segmenti.



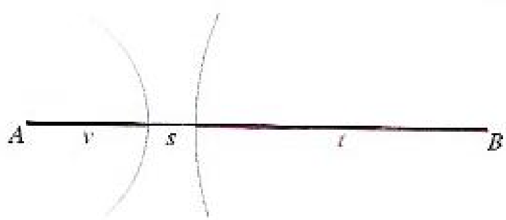
ATTENZIONE!

Affinché tre segmenti possano essere lati di un triangolo, ognuno di essi deve essere:
- minore della somma degli altri due;
- maggiore della loro differenza.

Scegliamone allora uno, per esempio s, di estremi A e B.
Apriamo ora il compasso con un'apertura uguale a t e, con centro in un estremo di s, tracciamo un arco di circonferenza. Apriamo poi il compasso con un'apertura uguale a v e, con centro nell'altro estremo di s, tracciamo un altro arco di circonferenza dalla stessa parte del primo, rispetto a s.
I due archi si incontrano in un punto C. Questo punto e i due estremi A e B del segmento s sono i vertici del triangolo.



Il compasso è stato utilizzato per riportare le lunghezze dei due segmenti t e v in modo tale che i lati del triangolo ottenuto abbiano rispettivamente la stessa lunghezza di s, t e v.
Affinché la costruzione sia possibile occorre che i due archi si intersechino. Quindi necessariamente la somma delle lunghezze di t e v deve essere maggiore di s, altrimenti non sarebbe possibile costruire il triangolo:



APPROFONDIMENTO

La costruzione ci porta a evidenziare una proprietà dei triangoli:

In un triangolo ogni lato è maggiore della somma degli altri due ed è minore della loro differenza.

Questa proprietà è una conseguenza dell'assioma 10 che lega l'allineamento dei punti alla distanza tra di essi.

Inoltre, la differenza delle lunghezze di t e v deve essere minore di s, altrimenti avremmo un'altra situazione che non porta alla costruzione del triangolo: