10 Sull'equazione $(a-2)^x = 3$ puoi affermare che:

A $\forall a \in \mathbb{R}$, $x = \log_{a-2} 3$.

B è impossibile.

C ammette una soluzione se $a = 2$.

D ammette soluzioni se e solo se $a \neq 3$.

E ammette una soluzione se $a > 3$.

11 La figura a lato rappresenta il grafico di una funzione. Quale?

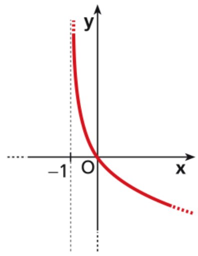
A $y = \ln(x+1)$

B $y = \log_{0,5}(x+1)$

C $y = \log_{0,5}(x-1)$

D $y = \ln(x-1)$

E $y = 1 - \log_{0,5} x$



QUESITI

Rispondi ai seguenti quesiti, supponendo che siano verificate le condizioni di esistenza dei logaritmi presenti.

12 Verifica la seguente identità: $\dfrac{\log_a x}{1+\log_a b} = \dfrac{\log_b x}{1+\log_b a}$.

13 Discuti al variare di a: $\log_{\frac{2}{\sqrt{a}}} x^2 > 4$. $\left[\text{per } 0 < a < 4,\ x < -\frac{4}{a} \vee x > \frac{4}{a};\ \text{per } a > 4,\ -\frac{4}{a} < x < \frac{4}{a}\right]$

14 Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln(2x - \sqrt{4} - 1)$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2004, *quesito* 9)

15 Si consideri la seguente uguaglianza: $\ln(2x+1)^4 = 4\ln(2x+1)$. È vero o falso che vale per ogni x reale? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2006, *quesito* 9)

16 Dimostra che $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b$ e calcola il valore dell'espressione $\log_{\sqrt{2}} 81 + \log_{2\sqrt{2}} 3 + \log_4 9 \cdot \log_{243} 4$.

17 Risolvere la seguente disequazione in x:

$(\ln x)^2 \geq \ln(x^2)$.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2004, *quesito* 4)

18 Luca e Claudia devono calcolare il valore di una certa espressione contenente logaritmi. Trovano come risultati rispettivamente: $\log_2 27 + \log_2 12$ e $2 + \log_2 81$.
Ammesso che il risultato ottenuto da Luca sia esatto, si può concludere che quello ottenuto da Claudia è sbagliato? Fornire una risposta esaurientemente motivata.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione straordinaria*, 2005, *quesito* 3)

19 Indica le relazioni che esistono tra i seguenti logaritmi, motivando le risposte:

a) $\log_5 x$ e $\log_{25} x$; b) $\log_a x$ e $\log_{\sqrt{a}} \sqrt{x}$; c) $\log_a x$ e $\log_{a^2} x$; d) $\log_a x$ e $\log_a(ax)$.

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Se a, b e c sono numeri reali positivi e $a \neq 1$, quale fra le seguenti uguaglianze è *falsa*?

A $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

B $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

C $\log_a a = 1$

D $\log_a b \cdot \log_a c = \log_a(b + c)$

E $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$

2 L'intervallo $]0; 3[$ è l'insieme delle soluzioni di:

A $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+3}{x} > 1.$

B $\log_2 \frac{x+3}{x} \geq 1.$

C $\log_2 \frac{x-3}{x} < 0.$

D $\log_2 \frac{x+3}{x} > 1.$

E $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+3}{x} \leq 0.$

3 La disequazione $2^x + \frac{8}{2^x} > 6$:

A è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

B è verificata per $x < 1 \ \vee \ x > 2$.

C è verificata per $x < 2$.

D è verificata $\forall x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \neq 0$.

E non ha soluzioni.

4 Quale fra le funzioni seguenti ha come dominio $\mathbb{R} - \{0\}$?

A $y = \frac{\ln|x|}{x-1}$

B $y = \ln x^2 - 1$

C $y = \frac{1}{\ln x^2}$

D $y = \frac{\ln x}{x}$

E $y = \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}$

5 Quale fra le seguenti uguaglianze è *vera*?

A $5^{2\log_5 2} = 4$

B $\log_3 5 - \log_3 4 = \log_3 1$

C $\log_3 5 + \log_3 4 = \log_3 9$

D $\frac{\log_3 5}{\log_3 4} = \log_3 \frac{5}{4}$

E $\log_3 5 \cdot \log_3 4 = \log_3 20$

6 Per quali valori reali di k la funzione

$$y = ke^{x+3} + \log(x^2 + kx + 1)$$

ha dominio coincidente con $\mathbb{R}$?

A $k > 0$

B $-2 < k < 2$

C $k < 0$

D $\forall k \in \mathbb{R}$

E $k > 2$

7 L'equazione $3^{-x^2+3x} = -3^{-2x^2+x}$:

A ha due soluzioni $x = 0$ e $x = -2$.

B ha una soluzione $x = 0$.

C ha due soluzioni $x = 0$ e $x = \frac{4}{3}$.

D non ha soluzione.

E è equivalente a $-x^2 + 3x = \frac{1}{2x^2 + x}$.

8 L'equazione $3^x + 1 = 4^{x+2}$:

A si risolve utilizzando l'uguaglianza $1 = \log 10$.

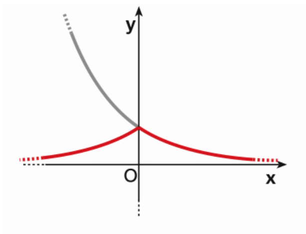
B si risolve utilizzando il metodo grafico.

C si risolve utilizzando i logaritmi e le loro proprietà.

D si risolve utilizzando l'uguaglianza $1 = 3^0$.

E è impossibile.

9 La seguente figura rappresenta il grafico (in rosso) di una funzione. Quale?



A $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

B $y = 2^{|x|}$

C $y = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\right|$

D $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

E $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

Per risolvere la disequazione logaritmica utilizziamo l'incognita ausiliaria $z = \log_{\frac{1}{2}} x$:

$$4 - z^2 \geq 0 \quad \to \quad z^2 - 4 \leq 0 \quad \to \quad -2 \leq z \leq 2.$$

Sostituiamo z con $\log_{\frac{1}{2}} x$ e consideriamo il sistema equivalente alla doppia disequazione precedente:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x \leq 2 \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq -2 \end{cases} \to \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \end{cases} \to \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} 4 \end{cases}$$

Poiché $0 < \frac{1}{2} < 1$, le disequazioni fra gli argomenti hanno verso contrario:

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Ritornando al sistema iniziale, troviamo il dominio della funzione con il sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \geq \frac{1}{4} \\ x \leq 4 \end{cases}$$

Il dominio della funzione è dunque:

$$D\colon\ \frac{1}{4} \leq x \leq 4.$$

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

819 $y = \sqrt{4^{x-1} - 2}$ $\left[x \geq \frac{3}{2}\right]$

820 $y = \log(2 - x) + \log(3x - x^2)$ $[0 < x < 2]$

821 $y = \dfrac{\sqrt{4 - x}}{\ln(2^x - 3)}$ $[\log_2 3 < x \leq 4 \wedge x \neq 2]$

822 $y = \dfrac{5}{6^x + 5}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

823 $y = \dfrac{\ln x}{1 + \ln x}$ $[0 < x < e^{-1} \vee x > e^{-1}]$

824 $y = \sqrt{3^x - 5}$ $\left[x \geq \frac{\log 5}{\log 3}\right]$

825 $y = \sqrt{\log_3 x - 2}$ $[x \geq 9]$

826 $y = \dfrac{2^{3x}}{8 - 2^x}$ $[x \neq 3]$

827 $y = \dfrac{\log x}{\ln x - 2}$ $[0 < x < e^2 \vee x > e^2]$

828 $y = \sqrt{e^{-x} - e^x}$ $[x \leq 0]$

829 $y = \sqrt{3 - \log_2(x - 1)}$ $[1 < x \leq 9]$

830 $y = \dfrac{7^x}{\sqrt[3]{8^x - 2}}$ $\left[x \neq \frac{1}{3}\right]$

831 $y = \dfrac{\ln(9 - 6x)}{\ln x - 1}$ $\left[0 < x < \frac{3}{2}\right]$

832 $y = \dfrac{1}{\log(2^x - 1)}$ $[0 < x < 1 \vee x > 1]$

833 $y = \dfrac{\ln x - 4}{\sqrt{4 - \ln x}}$ $[0 < x < e^4]$

834 $y = \sqrt{\log_2 x - 1} + \sqrt{-\log_2 x + 4}$ $[2 \leq x \leq 16]$

835 $y = \log_2(2^x + 2^{1-x} - 3)$ $[x < 0 \vee x > 1]$

836 $y = \dfrac{1}{\log^2 x - \log x}$ $[x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 10]$

837 $y = \sqrt{\dfrac{3^x - 1}{3^{-x} - 3}}$ $[-1 < x \leq 0]$

838 $y = \sqrt{\dfrac{\ln x}{\ln x - 1}}$ $[0 < x \leq 1 \vee x > e]$

839 $y = \log(x+5) - \log(6-x) + 2$ $[-5 < x < 6]$

840 $y = \ln(|x| - 1) + 2$ $[x < -1 \vee x > 1]$

841 $y = \log(10^x + 4) - \log(10^x - 5)$ $[x > \log 5]$

842 $y = \sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{2^x - 4}$ $[x \geq 4]$

a) Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2-x>0 & \text{condizione di esistenza;} \\ x+2>0 & \text{condizione di esistenza;} \\ 2-x>x+2 & \text{disuguaglianza fra gli argomenti con lo stesso verso} \\ & \text{di quella fra i logaritmi, dato che la base è maggiore di 1.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x>-2 \\ x>-2 \\ -2x>0 \end{cases} \to \begin{cases} x<2 \\ x>-2 \\ x<0 \end{cases}$$

Le soluzioni della disequazione data sono:

$-2<x<0$.

b) Osserviamo che, per la definizione di logaritmo, possiamo scrivere

$$-3=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=\log_{\frac{1}{5}}5^3=\log_{\frac{1}{5}}125$$

e perciò la disequazione assume la forma:

$\log_{\frac{1}{5}}20x<\log_{\frac{1}{5}}125$.

Ora dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 20x>0 & \text{condizione di esistenza;} \\ 20x>125 & \text{disuguaglianza fra gli argomenti con verso opposto rispetto a quella} \\ & \text{fra i logaritmi, essendo la base minore di 1.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>0 \\ 20x>125 \end{cases} \to \begin{cases} x>0 \\ x>\dfrac{25}{4} \end{cases}$$

Le soluzioni della disequazione assegnata sono:

$x>\frac{25}{4}$.

Risolvi le seguenti disequazioni.

620 $\log_3(2-5x)>2$ $\left[x<-\frac{7}{5}\right]$

621 $\log_2(x^2-1)>3$ $[x<-3 \vee x>3]$

622 $\log_{\frac{1}{3}}(4x-3)>-1$ $\left[\frac{3}{4}<x<\frac{3}{2}\right]$

623 $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(16-9x^2)<-2$ $[-1<x<1]$

624 $\log_5\left(\frac{2-x}{x+3}\right)<\log_5 4$ $[-2<x<2]$

625 $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{4+x}{2x+11}\right)<\log_{\frac{1}{5}}x$ $\left[0<x<\frac{-5+\sqrt{33}}{2}\right]$

626 $\log(2x-x^2)<\log(x-2)$ $[S=\varnothing]$

627 $\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{x}{x+1}\right)$ $[x<-1]$

628 $\log_{\frac{4}{5}}(2-x^2)-\log_{\frac{4}{5}}(1-2x)<0$ $\left[1-\sqrt{2}<x<\frac{1}{2}\right]$

Utilizziamo anche le proprietà dei logaritmi

Risolvi le seguenti disequazioni.

629 $\log_{\frac{1}{4}}(x^2-6)-\log_{\frac{1}{4}}(x-3)>-1$ $[S=\varnothing]$

630 $\frac{1}{2}\log(-x^2+2x)<\log x$ $[1<x<2]$

8. LE EQUAZIONI LOGARITMICHE

▶ Teoria a pag. 571

IN PRATICA
▶ Videolezione 27

Riconosci le equazioni logaritmiche nei seguenti gruppi di equazioni.

488 $3x+1=\log 22$; $3\cdot\log_2 x=17$; $\log_2 5 = x+\frac{3}{\log_5 x}$; $\log_7 x = 2$.

489 $x^{\log 5}=31$; $\sqrt{x-3-\log_5 44}=2$; $\log_3(x^2+1)=x^2+1$; $\log_{112}(\sqrt{x})=2$.

490 $\log(x-1)=\log x$; $\log(x^2+1)=\log x$; $\log_2 x=\log_3(x+1)$; $\log_5\sqrt{7}=x$.

491 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo l'equazione:

$$\log_2(x-2)-\log_2(8-x)=\log_2 x-3.$$

Imponiamo le condizioni di esistenza, ricordando che gli argomenti dei logaritmi devono essere positivi:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ 8-x>0 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<8 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow 2<x<8.$$

Risolviamo l'equazione con le proprietà dei logaritmi. Innanzitutto al secondo membro, poiché per la definizione di logaritmo è $\log_a a = 1$, scriviamo:

$$3=3\cdot 1=3\log_2 2=\log_2 2^3=\log_2 8.$$

Sostituiamo nell'equazione data e applichiamo le proprietà dei logaritmi:

$$\log_2(x-2)-\log_2(8-x)=\log_2 x-\log_2 8,$$

$$\log_2\left(\frac{x-2}{8-x}\right)=\log_2\frac{x}{8}.$$

Uguagliando gli argomenti, otteniamo l'equazione fratta:

$$\frac{x-2}{8-x}=\frac{x}{8}.$$

Svolgendo i calcoli, otteniamo:

$$x^2-16=0 \rightarrow x=\pm 4.$$

Solo il valore $x=4$ appartiene all'intervallo $]2;8[$ e quindi soddisfa le condizioni di esistenza.

L'unica soluzione dell'equazione data è:

$$x=4.$$

Risolvi le seguenti equazioni.

492 $\log_{x^2}(-2x+8)=1$ $[x=-4 \vee x=2]$

493 $\log_2(\sqrt{5-x^2}-x)=0$ $[x=1]$

494 $\log_2\left|\,|x^2-3|-1\right|=1$ $[x=0 \vee x=\pm\sqrt{6}]$

495 $\ln(x-2)=1$ $[x=e+2]$

496 $\log_4(3x-20)=3$ $[x=28]$

497 $\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)=-2$ $[x=6]$

498 $3\log_8(4x-7)=-2$ $\left[x=\frac{29}{16}\right]$

499 $4\log_{16}x=\log_5\frac{1}{125}$ $\left[x=\frac{1}{8}\right]$

500 $\log_2 x=\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ $[x=1]$

501 $\log_7(\sqrt{2x+1}-1)=0$ $\left[x=\frac{3}{2}\right]$

502 $\frac{1}{3}\log(9x+8-x^3)=\log(2-x)$ $[x=0]$

503 $\frac{1}{2}\log_2(2x-7)=2+\frac{1}{2}\log_2 x$ $[S=\varnothing]$

504 $\frac{1}{2}\log(1-8x)=\log(1-\sqrt{2x})$ $\left[x=0 \vee x=\frac{2}{25}\right]$

505 $\log_3|2x-1|-\log_3 x=0$ $\left[x=\frac{1}{3} \vee x=1\right]$

506 $-2\log_4\sqrt{6x}+\log_4(x^2-16)=0$ $[x=8]$

507 $\frac{2}{3}\log_4(2x-3)=\log_8 2$ $\left[x=\frac{5}{2}\right]$

425 Data la funzione $y = \log_4 x$, applica di seguito la traslazione di vettore $(2; -3)$, la simmetria rispetto all'asse x e la simmetria rispetto alla retta di equazione $x = 5$. Rappresenta graficamente la funzione ottenuta ed esprimila analiticamente. $[y = -\log_4(8 - x) + 3]$

426 Data la funzione $y = a^x - 2$, determina a sapendo che il punto $P(2; 7)$ appartiene al suo grafico e rappresentala graficamente. Disegna poi il grafico simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante e determina l'equazione della funzione corrispondente. $[a = 3;\ y = \log_3(x + 2)]$

Il dominio di funzioni contenenti funzioni logaritmiche

427 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il dominio della funzione:

$$y = \log \frac{x+3}{x-1}.$$

È una funzione logaritmica con argomento frazionario, quindi dobbiamo imporre due condizioni:

a) denominatore della frazione diverso da 0;
b) argomento del logaritmo positivo.

La prima condizione è contenuta nella seconda. Risolviamo pertanto solo questa:

$$\frac{x+3}{x-1} > 0.$$

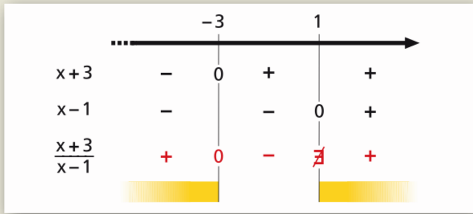
Studiamo il segno del numeratore:

$$x + 3 > 0 \quad \text{se} \quad x > -3.$$

Studiamo il segno del denominatore:

$$x - 1 > 0 \quad \text{se} \quad x > 1.$$

Compiliamo il quadro dei segni (figura sotto).



L'ultima riga, ricavata dalle precedenti con la regola dei segni, permette di giungere al risultato:

$$\frac{x+3}{x-1} > 0 \quad \text{se} \quad x < -3 \lor x > 1.$$

Pertanto D: $x < -3 \lor x > 1$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

428 $y = \ln \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$ $[x < -1 \lor x > 1]$

429 $y = \log(x - 8) + \log(2x + 7)$ $[x > 8]$

430 $y = \log_2 \dfrac{x - 3}{x + 2}$ $[x < -2 \lor x > 3]$

431 $y = \log(x^3 - 1)$ $[x > 1]$

432 $y = \log(x + 5) + \log(3 - x)$ $[-5 < x < 3]$

433 $y = \ln|x^2 - 1|$ $[x \neq \pm 1]$

434 $y = \ln(3 - |x|)$ $[-3 < x < 3]$

435 $y = \ln(x^2 - 4x) + 4$ $[x < 0 \lor x > 4]$

436 $y = \log(4^x - 2) + \log(2^x - 1)$ $\left[x > \dfrac{1}{2}\right]$

437 $y = \log \dfrac{x}{\sqrt{x - 2}}$ $[x > 2]$

438 $y = \sqrt{\log \dfrac{x}{x - 3}}$ $[x > 3]$

439 $y = \dfrac{x}{\log(x + 1)}$ $[x > -1 \land x \neq 0]$

440 $y = \dfrac{5}{\log(x^2 + 1) - 1}$ $[x \neq \pm 3]$

441 $y = \dfrac{\ln(x - \sqrt{x^2 - x})}{\ln(x - 3)}$ $[x > 3 \land x \neq 4]$

442 $y = \log_3 \log_2 x$ $[x > 1]$

443 $y = \dfrac{1}{\log_2 \log_3(x - 1)}$ $[x > 2 \land x \neq 4]$