La radice quadrata di 2 è un numero irrazionale

Dimostrazione

La $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale[1] ossia un numero che non si può esprimere in forma di frazione ($\frac{a}{b}$ con a e b numeri interi). Questa *proposizione*[2] può essere dimostrata[3] utilizzando il metodo della dimostrazione per assurdo: si presuppone vera l'affermazione contraria (la può essere espressa da una frazione) e si mostra che questa porta ad una contraddizione.
Per comprendere alcuni passaggi di questa dimostrazione occorre tener presente che:

- un qualsiasi numero naturale moltiplicato per 2 produce un numero pari (a);
- un numero naturale pari n può essere rappresentato come n = 2 · k, con k numero naturale (a1)[4];
- se il quadrato di un numero n è pari anche n è pari (b);
- una frazione può essere ridotta ai minimi termini[5] con un numero finito di passaggi (c) ;
- in Logica matematica se un proposizione P è vera la sua negazione è falsa e viceversa (d).

Partiamo con la dimostrazione.

D01 Consideriamo la proposizione "la $\sqrt{2}$ non può espressa da una frazione" (**P1**) e la sua negazione "la $\sqrt{2}$ può essere espressa da una frazione" (**P2**).Incominciamo la dimostrazione affermando che la **P2** è vera (inizia la *dimostrazione per assurdo*).
Se la si può esprimere come frazione allora scriviamo

$$(1) \qquad \sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

dove $\frac{m}{n}$ è una frazione ridotta ai minimi termini (dove m e n sono numeri naturali *primi tra loro* per cui **non possono essere entrambi pari**) che rappresenta il risultato dell'estrazione della radice quadrata di 2 per cui...

D02 ... elevando al quadrato[6] si deve ottenere 2, ossia

---

[1] I **numeri razionali** (insieme Q) sono quei numeri che possono essere rappresentati come frazioni come per esempio 3/7 e rappresentano il quoziente esatto di una divisione per esempio 3 : 4 = 3/4 o 12 : 8 = 12/8 = 3/4.
Esistono numeri che non si possono rappresentare in questo modo e vengono detti **numeri irrazionali**.
I numeri razionali e gli irrazionali costituiscono l'insieme dei **numeri reali** (insieme R)

[2] Una **proposizione** è una frase che possiede un valore di verità: vero o falso.

[3] In matematica, una dimostrazione è un **ragionamento** che permette, a partire da certi *assiomi* (proposizioni che si considerano vere), di stabilire che un'asserzione è necessariamente vera. L'affermazione che viene dimostrata si chiama **teorema**.
Una volta dimostrato, il teorema può essere utilizzato come base per dimostrare altre asserzioni.
Esistono varie tecniche di dimostrazione tra cui quella **per assurdo**: con questa metodologia, se si vuole dimostrare che una certa proprietà p è vera, si parte con il prendere come vera la negazione della proprietà p e si arriva, con una serie di ragionamenti, a mostrare che questo porta ad una *contraddizione* per cui p è vera.
Un'asserzione che è supposta vera ma che non è stata ancora dimostrata è chiamata **congettura**.

[4] Esempi: 8 = 4 · 2; 14 = 7 · 2; ecc

[5] Ricorda che una frazione si riduce ai *minimi termini* dividendo numeratore e denominatore per uno stesso numero fino a che essi diventano **primi tra loro** ossia che *non hanno divisori in comune tranne 1.*

$$(2) \qquad \frac{m^2}{n^2} = 2$$

Da questa eguaglianza si ottiene che

$$(3)^7 \qquad m^2 = 2 \cdot n^2$$

per cui m^2 è pari (per la premessa a) e anche m è pari (per la premessa b).

D03 Essendo m pari allora può essere ottenuto moltiplicando per 2 un numero naturale k (premessa a1) ossia

$$m = 2 \cdot k$$

e

$$m^2 = (2 \cdot k)^2$$

da cui

$$(4) \; m^2 = 4 \cdot k^2$$

D04 Sostituendo m^2 nella (3) con il valore trovato nella (4) otteniamo

$$4 \cdot k^2 = 2 \cdot n^2$$

Le proprietà delle eguaglianze[8] ci permettono di dividere entrambi i membri per 2 ottenendo

$$2 \cdot k^2 = n^2$$

Questo ci porta a concludere che anche n^2 (premessa a) è pari e, quindi, anche n.

D05 In **D01** avevamo però affermato che m e n erano primi tra loro, per cui *non possono essere entrambi pari*: abbiamo una **contraddizione** con l'ipotesi di partenza (**P2**) per cui **P2** è falsa.
In logica se una proposizione è falsa la sua negazione è vera (premessa d) per cui è vera la **P1** (la $\sqrt{2}$ non può espressa da una frazione).

---

[6] Ricorda che la radice quadrata è l'operazione inversa all'elevamento al quadrato. Per esempio 4 è la radice quadrata di 16 perchè $4^2 = 16$ e 3 / 4 è la radice quadrata di 9 / 16 perchè $\frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

[7] Ricorda che $\frac{m^2}{n^2} = m^2 : n^2$ per cui si può scrivere $m^2 : n^2 = 2$ per cui $m^2 = 2 \cdot n^2$ (*rammenta che per controllare che il risultato di una divisione esatta sia corretto lo si moltiplica per il divisore per vedere se si ottiene il dividendo*)

[8] Ricorda che le eguaglianze sono scritture del tipo $a = b$ che sono vere solo se a è identico a b (per esempio $3 = 7 - 4$; $a4 = a^2 \cdot a^2$). Vengono chiamati **membri** dell'uguaglianza ciò che si trova da parti opposte dell'uguale e **termini** i singoli componenti.
Esse hanno queste proprietà:
Sommando o sottraendo ad entrambi i membri di un eguaglianza lo stesso valore si ottiene un'eguaglianza.
Esempio: se a $3 + 4 = 5 + 2$ aggiungo 2 ottengo a $3 + 4 + 2 = 5 + 2 + 2$ ossia $9 = 9$
Moltiplicando o dividendo per uno stesso numero tutti i termini di un'eguaglianza si ottiene ancora un'eguaglianza.
Esempio: se divido per 2 i termini di $6 + 4 = 8 + 2$ ottengo $(6:2) + (4:2) = (8:2) + (2:2)$ ossia $3 + 2 = 4 + 1$

Appendice

Questa dimostrazione (che in questa scheda è data adoperando il linguaggio matematico moderno) è dovuta ad **Euclide**, matematico greco vissuto attorno al 300 a.C. ad Alessandria d'Egitto, uno dei massimi centri della vita commerciale e intellettuale dell'antichità, nel quale istituzioni come la Biblioteca e il Museo custodivano manoscritti provenienti da tutte le parti del mondo.
Non si conosce molto della vita di Euclide ma le sue opere, in particolare gli Elementi, costituiscono un contributo fondamentale alle conoscenze matematiche.

Prima edizione a stampa degli Elementi nel 1533.

Gli **Elementi** furono il testo guida della Matematica per numerosi secoli e, ancora oggi, una parte della geometria si basa su quest'opera.
Euclide fonda tutta la conoscenza geometrica su cinque assiomi (proposizioni considerate comuque vere) e da questi fa discendere tutte le altre affermazioni della geometria (i teoremi).
L'opera comincia con le definizioni di punto, retta e circonferenza, poi vengono introdotti i cinque postulati i quali affermano che:

- si può tracciare una linea retta da un punto qualsiasi ad un altro punto qualsiasi;
- si può prolungare una linea retta finita da entrambe le parti;
- si può disegnare una circonferenza con centro e raggio qualsiasi;
- tutti gli angoli retti sono congruenti;
- Se una linea retta, incidente su altre due linee rette, rende gli angoli interni da una stessa parte maggiori di due angoli retti, allora, prolungando indefinitamente le due linee rette, esse si incontreranno dalla parte in cui gli angoli formati dalla retta incidente risultano minori di due angoli retti.

Il quinto postulato è conosciuto sotto un'altra forma: "per un punto passa una ed una sola retta parallela a una retta data".
Gli Elementi sono divisi in 15 libri di cui i primi 13 composti da Euclide e i rimanenti 2 da altri autori.