La riduzione al primo quadrante

Utilizzando le relazioni stabilite per gli angoli associati, è possibile determinare le funzioni goniometriche di qualunque angolo, conoscendo le funzioni goniometriche degli angoli che appartengono al primo quadrante.
Il procedimento relativo viene detto **riduzione al primo quadrante**.

ESEMPIO

Riduciamo al primo quadrante sen 110°.
Poiché $110° = 90° + 20°$, possiamo scrivere:

$$\operatorname{sen} 110° = \operatorname{sen}(90° + 20°) = \cos 20°.$$

10. LE FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

La formula di sottrazione del coseno

Iniziamo con la formula di sottrazione del coseno perché è la più semplice da dimostrare.

Consideriamo $\cos(\alpha - \beta)$. **Non** è vero che:

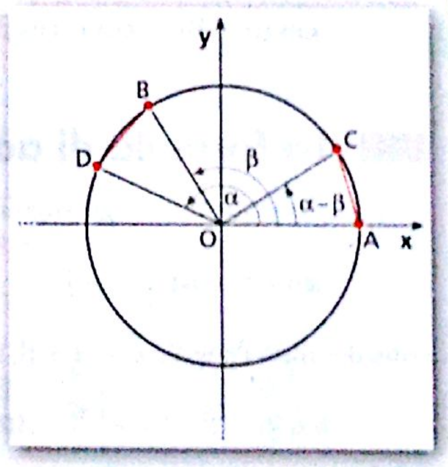
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha - \cos\beta. \qquad \text{FALSO!}$$

Per esempio, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \neq \cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{6}$.

Infatti, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$,

invece: $\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{6} = 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Esiste tuttavia una relazione fra $\cos(\alpha - \beta)$ e i seni e i coseni di α e di β. Cerchiamola.
Consideriamo due angoli $D\widehat{O}A$ di ampiezza α e $B\widehat{O}A$ di ampiezza β, con $\alpha > \beta$. La loro differenza è $D\widehat{O}B = \alpha - \beta$ (figura 36).
Consideriamo l'angolo $C\widehat{O}A = \alpha - \beta$, che ha il primo estremo nell'origine A degli archi.
I punti B, C e D hanno allora coordinate $B(\cos\beta; \operatorname{sen}\beta)$, $C(\cos(\alpha-\beta); \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$, $D(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha)$.



◄ **Figura 36** Le corde CA e DB sono congruenti perché corrispondenti di angoli al centro congruenti.

Essendo $D\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}A$ entrambi di ampiezza $\alpha - \beta$, le corde CA e DB sono congruenti perché corrispondenti di angoli al centro congruenti. Applicando la formula della distanza tra due punti, otteniamo:

$$\overline{CA}^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = [\cos(\alpha-\beta) - 1]^2 + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta),$$
$$\overline{DB}^2 = (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2.$$