60 Determina il perimetro di un trapezio isoscele circoscritto a una circonferenza di raggio r e la cui base maggiore è $4r$. [$10r$]

61 Calcola l'area del triangolo ABC conoscendo i lati $b=2\sqrt{2}$, $c=5$ e l'angolo compreso $\alpha=\frac{\pi}{4}$. [5]

62 Calcola l'area del triangolo ABC conoscendo i lati $a=8$, $b=6$ e l'angolo compreso $\gamma=\frac{5}{6}\pi$. [12]

63 Dimostra che l'area di un triangolo di lati a, b e angolo compreso γ è $\frac{1}{2}ab\,\text{sen}\gamma$.

64 Dimostra che l'area di un parallelogramma di lati a e b, formanti un angolo di ampiezza α, è $ab\,\text{sen}\alpha$.

65 Di un quadrilatero convesso si conoscono le misure delle due diagonali d_1 e d_2 e l'ampiezza dell'angolo α da esse formato. Determinane l'area. $\left[\frac{1}{2}d_1 d_2\,\text{sen}\alpha\right]$

66 Esprimi la lunghezza y della corda AB di circonferenza di centro O e raggio r in funzione dell'ampiezza dell'angolo $x=A\hat{O}B$ e traccia il grafico della funzione così ottenuta. $\left[y=2r\,\text{sen}\frac{x}{2}\right]$

67 Calcola l'ampiezza dell'angolo che la diagonale di un cubo forma con la diagonale di una delle facce. [$\simeq 35°15'52''$]

68 In un triangolo rettangolo si traccia l'altezza relativa all'ipotenusa e si inscrivono due circonferenze nei due triangoli che così si ottengono. Dimostra che le circonferenze sono proporzionali ai cateti del triangolo dato.

Nei seguenti problemi le soluzioni indicate tra parentesi tonde rappresentano gli estremi dell'intervallo possibile se si tiene conto dell'accuratezza dei dati di partenza.

69 Ponendosi a 3.0 m di distanza da un muro, una persona i cui occhi distano 1.70 m da terra ne vede il bordo alzando lo sguardo di 40° rispetto alla direzione orizzontale. Calcola l'altezza del muro. [$\simeq$4.2 m (4.1, 4.3)]

70 L'apertura angolare del fascio luminoso di un proiettore è di 40°. Se vogliamo che la larghezza del rettangolo di parete illuminato sia di 2.0 m e consideriamo puntiforme la sorgente luminosa, a quale distanza dalla parete deve essere posto il proiettore? [$\simeq$2.7 m (2.6, 2.8)]

71 Una barca è attraccata a un molo tramite una corda lunga 5 metri. Se la corda è ben tesa, per via delle correnti, e risulta inclinata di 10° rispetto al livello del mare, quale è la distanza della barca dal molo? [$\simeq$4.9 m (4.4, 5.4)]

72 Si vuole calcolare l'altezza a cui vola un aquilone sapendo che il filo è lungo 62 metri ed è ben teso e l'angolo che esso forma col terreno è di 40°. [$\simeq$39.9 m (39.1, 40.6)]

73 Si ritaglia su un cartoncino la sagoma per formare una piramide retta a base quadrata. Il lato di base misura 10.0 cm e ognuno degli angoli alla base dei quattro triangoli isosceli che formeranno le facce della piramide misura 50°. Quanto sarà alta la piramide? [$\simeq$3.2 m (2.95, 3.52)]

74 Ritaglia su un cartoncino la sagoma per costruire una piramide retta a base quadrata di lato k. Determina i valori minimo e massimo che può assumere ognuno degli angoli x alla base dei quattro triangoli isosceli che formeranno le facce della piramide e stabilisci come varia l'altezza y della piramide in funzione di x. $\left[\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2};\ y=\frac{k}{2}\sqrt{\tan^2 x-1}\right]$

Disegnata su carta millimetrata una circonferenza goniometrica (assumendo come unità di misura 10 cm), determina gli angoli x compresi tra 0 e 2π corrispondenti ai seguenti valori del seno o del coseno:

125 $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$

126 $\cos x = 0.7$

127 $\operatorname{sen}x = -0.7$

128 $\operatorname{sen}x = 0.8$

129 $\cos x = -0.2$

130 $\operatorname{sen}x = 0.3$

131 $\cos x = 0.85$

132 $\operatorname{sen}x = 0.85$

133 $\cos x = -0.5$

134 Per valori piccoli dell'angolo ϑ, si ha $\operatorname{sen}\vartheta \cong \vartheta$. Trova qual è la massima ampiezza positiva, espressa in radianti, per la quale la tua calcolatrice dà lo stesso valore per l'angolo e il suo seno.
A quale ampiezza corrisponde in gradi?

135 Compila la seguente tabella utilizzando la calcolatrice (Δx e Δy rappresentano le differenze tra due valori successivi di x e y nella tabella):

x	$y = \operatorname{sen}x$	Δx	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
0°				
10°		10		
20°		10		
30°		10		
40°		10		
50°		10		
60°		10		
70°		10		
80°		10		
90°		10		

Come varia sen$x$ al crescere di x? Per intervalli Δx uguali come variano gli intervalli Δy e la pendenza, rappresentata da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$? Il valore di sen$x$ varia secondo una legge di proporzionalità diretta?

136 Compila la seguente tabella, utilizzando la calcolatrice:

α gradi decimali	α gradi sessagesimali	α radianti	senα	cosα
	33° 20′			
		$\frac{3}{11}\pi$		
120,15°				
		$-0{,}5\pi$		
200,60°				
	12° 44′			

46 40° 80° 260° $\left[\frac{2}{9}\pi; \frac{4}{9}\pi; \frac{13}{9}\pi\right]$

47 200° 225° 270° $\left[\frac{10}{9}\pi; \frac{5}{4}\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$

48 5° 10° 15° $\left[\frac{\pi}{36}; \frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{12}\right]$

49 25° 50° 75° $\left[\frac{5}{36}\pi; \frac{5}{18}\pi; \frac{5}{12}\pi\right]$

50 1° 3° 9° $\left[\frac{\pi}{180}; \frac{\pi}{60}; \frac{\pi}{20}\right]$

51 5°30′ 8°20′ 10°30′ $\left[\frac{11}{360}\pi; \frac{5}{108}\pi; \frac{7}{120}\pi\right]$

Esprimi in radianti, in forma decimale, approssimata fino alla seconda cifra decimale, l'ampiezza dei seguenti angoli espressi in gradi (*):

52 25°30′ 50°30′ 10°10′ [0.45; 0.88; 0.18]

53 10°15′ 20°30′ 30°45′ [0.18; 0.36; 0.54]

54 7°15′ 10°45′ 15°45′ [0.13; 0.19; 0.27]

55 80°50′ 55°30′ 15°15′ [1.41; 0.97; 0.27]

56 150°20′ 137°40′ 200°30′ [2.62; 2.40; 3.50]

57 9°30′ 19°30′ 190°10′ [0.17; 0.34; 3.32]

58 13°15′20″ 48°00′30″ [0.23; 0.84]

59 31°27′54″ 12°38′47″ [0.55; 0.22]

60 7°07′53″ 12°25′34″ [0.12; 0.22]

61 80°50′37″ 14°11′45″ [1.41; 0.25]

Esprimi in gradi l'ampiezza dei seguenti angoli scritti in radianti:

62 $\frac{\pi}{2}$ $\frac{3}{2}\pi$ 2π [90°; 270°; 360°]

63 $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{9}$ $\frac{\pi}{12}$ [60°; 20°; 15°]

64 $\frac{1}{5}\pi$ $\frac{2}{5}\pi$ $\frac{3}{5}\pi$ [36°; 72°; 108°]

65 $\frac{4}{5}\pi$ $\frac{7}{5}\pi$ $\frac{9}{5}\pi$ [144°; 252°; 324°]

66 $\frac{1}{180}\pi$ $\frac{1}{60}\pi$ $\frac{1}{20}\pi$ [1°; 3°; 9°]

67 $\frac{2}{3}\pi$ $\frac{5}{6}\pi$ $\frac{4}{3}\pi$ [120°; 150°; 240°]

68 $\frac{\pi}{10}$ $\frac{7}{2}\pi$ $\frac{4\pi}{3}$ [18°; 630°; 240°]

69 $\frac{1}{6}\pi$ $\frac{10}{9}\pi$ $\frac{\pi}{24}$ [30°; 200°; 7°30′]

70 1 2 3 [~57°17′45″; ~114°35′30″; ~171°53′14″]

71 10 3.14 6.28 [~213°14′54″; ~180°; ~360°]

72 1.5 1.2 4 [~85°56′37″; ~68°45′18″; ~229°10′59″]

73 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}\pi$ $\sqrt{2}$ [~19°5′55″; 60°; ~81°1′42″]

Individua a quale classe di equivalenza modulo 360° appartiene ognuna delle seguenti ampiezze espresse in gradi:

E ▸ **ESERCIZIO SVOLTO**

1500°

Effettuiamo la divisione intera per 360°:

$1500° \text{ div } 360° = 4°$

Il resto è:

$1500° \bmod 360° = 60°$

Si ha:

$1500° = 60° + 4 \cdot 360°$

1500° appartiene quindi alla classe 60° (mod 360°).

(*) Per i seguenti esercizi conviene usare la calcolatrice scientifica, dopo averne consultato il manuale di istruzioni.

170 $y = \text{sen}(\pi - x)$

171 $y = \text{sen}(x + \pi)$

172 $y = \cos(x + 2\pi)$

173 $y = \cos x - 1$

174 $y = -\cos x$

175 $y = 3\,\text{sen}x$

176 $y = \text{sen}|x|$

177 $y = [\cos x]$

178 $y = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$

179 $y = \cos(\pi - x)$

180 $y = \cos(x + \pi)$

181 $y = \text{sen}x + 1$

182 $y = -\text{sen}x$

183 $y = 2\cos x$

184 $y = |\text{sen}x|$

185 $y = [\text{sen}x]$

186 $y = |\cos x|$

187 $y = -\text{sen}^2 x - \cos^2 x$

188 $y = \text{sen}2x$

189 $y = \cos(2x - \pi)$

190 $y = 2 - \text{sen}\dfrac{x}{2}$

191 $y = 3\cos\dfrac{x}{3}$

192 $y = \left|-2\cos\dfrac{x}{2}\right|$

193 $y = |1 - \text{sen}(2x - \pi)|$

Scrivi espressioni equivalenti alle seguenti utilizzando soltanto sen$x$ *e* cos$x$*:*

E ▸ ESERCIZIO SVOLTO

$$\text{sen}(-x) + \text{sen}(x + 2\pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x)$$

Possiamo utilizzare le seguenti relazioni (relative ad archi associati o alla periodicità delle funzioni goniometriche):

$\text{sen}(-x) = -\text{sen}x \quad \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}x \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen}x \quad \cos(\pi + x) = -\cos x$

Sostituendo si ottiene:

$-\text{sen}x + \text{sen}x + \text{sen}x - \cos x$

Cioè:

$\text{sen}x - \cos x$

194 $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \text{sen}x$ [$\cos x - \text{sen}x$]

195 $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ [$\cos x - \text{sen}x$]

196 $\cos(x + 2\pi) - \text{sen}\left(x + \dfrac{3}{2}\pi\right)$ [$2\cos x$]

197 $\text{sen}(2\pi - x) + \text{sen}(2\pi + x) + \cos(-x)$ [$\cos x$]

198 $\text{sen}(2\pi - x) + \cos(-x) + \text{sen}x$ [$\cos x$]

199 $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \cos(2\pi - x) - \text{sen}(-x)$ [$\text{sen}x$]

200 $\text{sen}(-x) - \cos(-x) - \cos(\pi - x)$ [$-\text{sen}x$]

201 $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ [$\cos x + \text{sen}x$]

202 Sulla sinusoide $y = \text{sen}x$ considera i punti corrispondenti ai valori della variabile $\pi - x$ e $\pi + x$, con $0 < x < \pi$. Per $0 \le x \le 2\pi$, la curva è simmetrica rispetto al punto $(\pi\,;\,0)$? Nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant \pi$ c'è un asse di simmetria? Quale? E per $\pi \le x \le 2\pi$? A quali situazioni sulla circonferenza goniometrica corrispondono queste simmetrie?
[sì; sì; $x = \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi$; $\text{sen}(\pi + x) = \text{sen}(\pi - x)$ e $\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = \text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)$]

203 Determina in quali intervalli dell'asse delle ascisse i tratti di curva del grafico di $y = \cos x$ sono simmetrici rispetto a qualche asse o a qualche centro di simmetria.

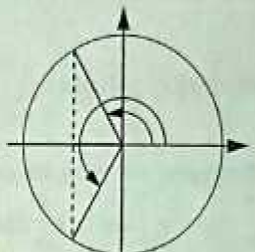
204 Determina in quali intervalli dell'asse delle ascisse i tratti di curva del grafico di $y = \text{sen}x$ sono simmetrici centralmente. [$[-x, x]$, $x \in \mathbf{R}$]

5 Corrispondenze goniometriche inverse

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche:

E ▸ ESERCIZIO SVOLTO

$\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$



Poniamo $\alpha=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}$

Si ha $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ quando:

$\alpha=\frac{2}{3}\pi\ (\mathrm{mod}\,2\pi)$ oppure $\alpha=\frac{4}{3}\pi\ (\mathrm{mod}\,2\pi)$

Oppure, in forma più compatta:

$\alpha=\pi\pm\frac{\pi}{3}\ (\mathrm{mod}\,2\pi)$

Sostituendo, troviamo x:

$$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}\ (\mathrm{mod}\,2\pi)\Rightarrow\ \frac{1}{2}x=\begin{cases}\pi+\frac{2}{3}\pi\ (\mathrm{mod}\,2\pi)\\ \pi\ (\mathrm{mod}\,2\pi)\end{cases}\Rightarrow\ x=\begin{cases}2\pi+\frac{4}{3}\pi\ (\mathrm{mod}\,4\pi)\\ 2\pi\ (\mathrm{mod}\,4\pi)\end{cases}$$

279 $\mathrm{sen}x=1;\quad \mathrm{sen}x=-1$ $\left[\frac{\pi}{2}(\mathrm{mod}\ 2\pi);\ \frac{3}{2}\pi(\mathrm{mod}\ 2\pi)\right]$

280 $\cos x=1;\quad \cos x=-1$ $[0(\mathrm{mod}\ 2\pi);\ \pi(\mathrm{mod}\ 2\pi)]$

281 $\mathrm{sen}x=\frac{1}{2};\quad \cos x=\frac{1}{2}$ $\left[\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}(\mathrm{mod}\ 2\pi);\ \pm\frac{\pi}{3}(\mathrm{mod}\ 2\pi)\right]$

282 $\mathrm{sen}x=\frac{\sqrt{3}}{2};\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}(\mathrm{mod}\ 2\pi);\ \pm\frac{\pi}{6}(\mathrm{mod}\ 2\pi)\right]$

283 $\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)=0$ $[0(\mathrm{mod}\ 2\pi)]$

284 $\cos\left(\frac{1}{3}x\right)=-1$ $[3\pi(\mathrm{mod}\ 6\pi)]$

285 $\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ $\left[-\frac{\pi}{12}\ o\ \frac{7}{12}\pi(\mathrm{mod}\ 2\pi)\right]$

286 $\mathrm{sen}(5-x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[5-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}(\mathrm{mod}\ 2\pi)\right]$

287 $\cos\left(\frac{\pi}{10}+x\right)=-1$ $\left[\frac{9}{10}\pi(\mathrm{mod}\ 2\pi)\right]$

288 $\mathrm{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ $\left[\frac{\pi}{6}(\mathrm{mod}\ 2\pi)\right]$

289 $\cos(3x+\pi)=0$ $\left[-\frac{\pi}{6}\left(\mathrm{mod}\ \frac{\pi}{3}\right)\right]$

290 $-\mathrm{sen}\left(4x+\frac{\pi}{5}\right)=1$ $\left[\frac{13}{40}\pi\left(\mathrm{mod}\ \frac{\pi}{2}\right)\right]$

291 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}$ $\left[-\frac{\pi}{15}\ o\ \frac{4}{15}\pi(\mathrm{mod}\ \pi)\right]$

292 $\mathrm{sen}(3\pi-x)=\frac{1}{2}$ $\left[\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}(\mathrm{mod}\ 2\pi)\right]$

293 $\mathrm{sen}x=\mathrm{sen}\frac{\pi}{9}$ $\left[\frac{\pi}{9}\ o\ \frac{8}{9}\pi(\mathrm{mod}\ 2\pi)\right]$

294 $\mathrm{sen}x=\cos\frac{\pi}{3}$ $\left[\frac{\pi}{6}\ o\ \frac{5}{6}\pi(\mathrm{mod}\ 2\pi)\right]$

295 $\cos(x+\pi)=\cos\frac{1}{10}\pi$ $\left[-\pi\pm\frac{\pi}{10}(\mathrm{mod}\ 2\pi)\right]$

296 $\mathrm{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)$ $\left[-\frac{\pi}{4}(\mathrm{mod}\ \pi)\right]$

297 $\mathrm{sen}\left(x+\frac{1}{3}\pi\right)=\mathrm{sen}\frac{1}{5}\pi$ $\left[-\frac{2}{15}\pi\ o\ \frac{7}{15}\pi(\mathrm{mod}\ 2\pi)\right]$

298 $\cos(x-2\pi)=\cos\frac{5}{12}\pi$ $\left[\pm\frac{7}{12}\pi(\mathrm{mod}\ 2\pi)\right]$

299 $\tan x=0$ $[0\ (\mathrm{mod}\ \pi)]$

300 $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ $\left[-\frac{\pi}{4}(\mathrm{mod}\ \pi)\right]$

1 La risoluzione di un triangolo rettangolo

Nei seguenti esercizi b e c sono le misure dei cateti di un triangolo rettangolo (con $\alpha = \pi/2$), rispettivamente opposti agli angoli di ampiezza β e γ, e a è l'ipotenusa. Esprimi il terzo elemento in funzione dei primi due:

1 $a = 2,\ \beta = 60°;\ c$ [1]

2 $b = 2\sqrt{2},\ \beta = 45°;\ a$ [4]

3 $a = 4,\ \gamma = 30°;\ c$ [2]

4 $a = 2\sqrt{3},\ b = \sqrt{3};\ c$ [3]

5 $a = 3 + \sqrt{3},\ c = 3 - \sqrt{3};\ \gamma$ [15°]

6 $\beta,\ b;\ c$ $\left[c = \dfrac{b}{\tan\beta}\right]$

7 $\beta,\ b;\ a$ $\left[a = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta}\right]$

8 $\beta,\ c;\ b$ $[b = c\tan\beta]$

9 $\beta,\ c;\ a$ $\left[a = \dfrac{c}{\cos\beta}\right]$

10 $\beta,\ a;\ b$ $[b = a\operatorname{sen}\beta]$

11 $\beta,\ a;\ c$ $[c = a\cos\beta]$

12 $\gamma,\ b;\ c$ $[c = b\tan\gamma]$

13 $\gamma,\ b;\ a$ $\left[a = \dfrac{b}{\cos\gamma}\right]$

14 $\gamma,\ c;\ b$ $\left[b = \dfrac{c}{\tan\gamma}\right]$

15 $\gamma,\ c;\ a$ $\left[a = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\right]$

16 $\gamma,\ a;\ b$ $[b = a\cos\gamma]$

17 $\gamma,\ a;\ c$ $[c = a\operatorname{sen}\gamma]$

18 $b,\ c;\ \beta$ $\left[\beta = \arctan\dfrac{b}{c}\right]$

19 $b,\ c;\ \gamma$ $\left[\gamma = \arctan\dfrac{c}{b}\right]$

20 $b,\ c;\ a$ $[a = \sqrt{b^2 + c^2}]$

21 $a,\ b;\ \beta$ $\left[\beta = \arcsen\dfrac{b}{a}\right]$

22 $a,\ b;\ \gamma$ $\left[\gamma = \arccos\dfrac{b}{a}\right]$

23 $b,\ a;\ \gamma$ $\left[\gamma = \arccos\dfrac{a}{b}\right]$

24 $a,\ c;\ \beta$ $\left[\beta = \arccos\dfrac{c}{a}\right]$

25 $a,\ c;\ \gamma$ $\left[\gamma = \arcsen\dfrac{c}{a}\right]$

26 $a,\ c;\ b$ $[b = \sqrt{a^2 - c^2}]$

2 Applicazioni con triangoli rettangoli

Determina l'ampiezza dell'angolo che ognuna delle seguenti rette forma con l'asse delle ascisse:

E ▸ ESERCIZIO SVOLTO

$x - \sqrt{3}y + 1 = 0$

Esplicitiamo l'equazione della retta rispetto alla variabile y:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$